

Blå Memoserie  
Økonomisk Institut  
Københavns Universitet

Nr. 216 / august 2007

Danske lægers turnusordning

Jens Leth Hougaard, Jacob Michelsen Kolind  
og Lars Peter Østerdal

Stu­di­estræde 6, 1455 Kø­ben­havn K  
Tel 35 32 30 82 - Fax 35 32 30 00  
<http://www.econ.ku.dk>

ISSN: 0107-3664 (print) ISSN: 1601-247X (online)

# Danske lægers turnusordning<sup>1</sup>

Jens Leth Hougaard, Jacob Michelsen Kolind<sup>2</sup>, Lars Peter Østerdal  
Økonomisk Institut, Københavns Universitetet

August 2007

## English summary

A medical internship is mandatory for all medical students graduating from a Danish university. The internships are distributed fairly even amongst most Danish hospitals, m.a. in order to secure a steady inflow of new doctors to all regions of Denmark. When allocating the graduates to an internship by lottery, the National Board of Health takes into account only the candidates preferences over the various internships, for reasons discussed in the paper. However, a problem, relating to the lottery which the NBH uses, is that the lottery itself is not efficient in an economic sense. By way of simulations this article shows how an alternative lottery built on the so-called EPS-algorithm developed by Katta and Sethuraman [Journal of Economic Theory 131, 231-250] performs better than the lottery used today. This, along with other problematic aspects such as black-market trading of internships, indicates that a replacement of the currently used lottery may be beneficial for the NBH as well as the graduating medical students.

## Indledning

Turnusordningen er en betegnelse for det kliniske uddannelsesforløb som medicinske kandidater skal gennemføre efter den medicinske embedseksamen for at erhverve autorisation som selvstændig læge. Den består af et uddannelsesforløb hvor den enkelte læge får ansættelse, dels på et sygehus, dels i almen praksis. Hvert halve år sendes omkring 400 færdiguddannede læger i turnus på landets sygehuse<sup>3</sup>. Af regionale hensyn og praktiske årsager er turnuspladserne geografisk fordelt over hele landet.

Der er mange årsager til, at den enkelte læge har præferencer for særlige sygehuse og derfor har en holdning til turnuspladsernes fordeling. For eksempel kan der være store omkostninger (inklusive sociale omkostninger) forbundet med at skulle flytte fra en ende af landet til en anden for at gennemføre turnusuddannelsen, hvis man allerede er etableret som familie eller i et socialt netværk. Alle pladserne er derfor ikke lige attraktive set fra de dimitterede medicinstuderendes synspunkt. Tilsvarende kan man let forestille sig at sygehuse heller ikke er ligeglade med hvilke kandidater de modtager. Problemet er således at forsøge at finde den bedst mulige matching mellem læger og praktikpladser.

---

<sup>1</sup> Forfatterne takker Søren Thorning fra Sundhedsstyrelsen og medarbejdere fra sygehusregionerne for fremskaffelse af oplysning om turnusordningen Vinteren 2006/2007. Desuden en særlig tak til kommende turnuskandidater og kursusansvarlige på Rigshospitalet og Hvidovre Hospital for stor samarbejdsvilje i forbindelse med generering af et data-sæt egnet til simuleringer.

<sup>2</sup> Korrespondance: Jacob Michelsen Kolind, Økonomisk Institut, Københavns Universitetet, Studiestræde 6, 1455 København K. E-mail: [Jacob.Kolind@gmail.com](mailto:Jacob.Kolind@gmail.com).

<sup>3</sup> Jf. dokumenterne "Opgørelse over turnusordningen" på <http://www.sst.dk/Uddannelse/Laeger/Turnus.aspx>

En mulighed er at overlade matchingen til de involverede parter selv – altså til markedet. Erfaringer fra f.eks. USA peger imidlertid på, at sådan en løsning sjældent vil være optimal for nogen af parterne. Typisk vil sygehusene nemlig forsøge at hverve de bedste studerende allerede inden de er færdige med studiet. De studerende kommer således let til at binde sig tidligt (fordi de jo ikke ved om der kommer et bedre tilbud og hellere vil være på den sikre side), og undgår måske derved muligheden for en bedre matching. Således kan man let forstille sig situationer hvor en læge der har indgået kontrakt med et hospital hellere ville have kunnet takke ja til et senere tilbud fra et andet hospital der tilmed må tage til takke med en anden kandidat som de finder ringere<sup>4</sup>.

Der er således meget der taler for at man forsøger at finde en central løsning på matchingproblemet. I USA og England har man valgt en fremgangsmåde hvor både hospitaler og turnussøgende får lov til at rangordne hinanden. En matching foregår derefter centralt i et ”clearing house”. Populært sagt består matchingen af en række inklinationsrunder som til et afdansningsbal, der til slut afstedkommer en matching der er stabil i den forstand at der ikke findes et par (en turnussøgende og et sygehus) der vil ønske at bryde den matching der er opnået. Specielt er der således ingen gensidigt fordelagtige byttehandler blandt de turnussøgende og sygehusene får de bedste kandidater blandt de stabile udfald, se f.eks. Roth (1984, 2003).

Set med danske øje kan man fristes til at sige, at den matching der opnås fungerer lidt for godt fordi dygtige læger typisk matches med store hospitaler i storbyerne. Resultatet vil således ofte være en skæv geografisk fordeling af talentmassen, hvilket man kan frygte vil have konsekvenser (på sigt) for kvaliteten af ydelserne på hospitaler i de geografiske randområder.

Da man i Danmark har et skattefinansieret nationalt sundhedssystem, er der fra politisk side lagt visse begrænsninger på hvor frit man som planlægger kan designe en fordelingsprocedure fordi borgerne principielt har krav på en ensartet behandling i hele landet. Der er derfor en politisk modvilje mod at lade sygehusene prioritere de studerende efter fx karakterer, da dette givetvis, jf. de amerikanske tilstande, vil øge skævvridningen i talentmassen mellem provins og universitetsbyer. Også turnuspladsernes geografiske fordeling er en politisk beslutning og må som sådan tages for givet fra et planlægningsmæssigt synspunkt, spredt jævnt ud over landet.

I Danmark er det også udelukket at kompensere lægerne økonomisk for at vælge uattraktive turnuspladser (da studerende generelt ikke subsidieres i deres studievalg) eller at udbyde turnuspladserne på en auktion (da studerende generelt ikke betaler for deres studier). En auktion ville ellers løse mange problemer set med planlæggerens øje, da udfaldet af en auktion i teorien vil stille alle agenter tilfredse med den plads de får tildelt, og således ikke ville ønske at bytte med de andre agenter, givet deres betalingsvillighed.

Planlæggeren skal derfor designe en fordelingsprocedure der ikke involverer penge, hvor kun lægernes egne ønsker påvirker det endelige udfald (og ikke f.eks. deres karakterer eller sygehusenes prioriteter) og turnuspladsernes geografiske placering må tages for givet. Den nuværende fordelingsprocedure opfylder (næsten) de tre ovenstående krav, men mangler til gengæld økonomisk motivation for at være valgt blandt flere mulige fordelingsprocedurer. Det lille ”næsten” i parentes har sneget sig ind fordi den nuværende fordelingsprocedure indirekte forbyrder sig mod det første krav: fordelingsproceduren må ikke involvere penge. Måden proceduren er designet på i dag åbner nemlig op for at bytte pladser. Et tilbud der ofte benyttes og undertiden involverer penge

---

<sup>4</sup> Se Roth (1984, 2003).

under bordet blandt de turnussøgende læger. Beløb på op imod 200.000 kr. bliver fra tid til anden nævnt i dagspressen og på internetfora for medicinstuderende. Alene dette problem ved den nuværende fordelingsprocedure har skabt så stor utilfredshed blandt de medicinstuderende, at der igennem flere år har været diskuteret krav om en ændring af fordelingsproceduren.

I princippet er efterfølgende byttehandler mellem de studerende (med eller uden penge under bordet) jo kun af det gode i den forstand, at de retter op på nogle af de skavanker der er ved den politisk fastlagte fordelingsprocedure. Problemet er imidlertid, at fordi en turnusplads via sådanne byttehandler går hen og opnår en ”markedsværdi”, så kan man frygte at de studerende fristes til at manipulere med deres præferencer over turnuspladserne. F.eks. kunne man forestille sig, at en studerende der er født og opvokset i Lægeløse foretrækker at vende tilbage til Lægeløse Sygehus (der vist ikke eksisterer) men vælger at prioritere Rigshospitalet højest. Der er nu en vis sandsynlighed for at vedkommende rent faktisk får en plads på Riget og denne plads kan således ”sælges”, hvorefter en plads på Lægeløse Sygehus relativt let kan opnås da disse, af uransagelige årsager, er langt mindre eftertragtede. De problemer der er involveret i at designe fordelingsproceduren er således mere komplicerede end som så.

I det følgende ser vi først på hvordan den nuværende danske fordelingsprocedure konkret fungerer og diskuterer de problematiske aspekter ved denne. Bagefter præsenteres en forbedret fordelingsprocedure der i teoretisk forstand og ved simulationseksperimenter er den nuværende procedure overlegen. Den nye fordelingsprocedurer undgår de designfejl, der ligger i den gamle procedure. Vi konkluderer at den nye fordelingsprocedure bør erstatte den gamle.

## Den nuværende fordelingsprocedure

For de danske turnuskandidater foregår fordelingsproceduren som en lodtrækning. Hvert halve år er der start for nye turnushold på sygehusene, og godt et halvt år før turnusstart melder de næsten færdige medicinstuderende sig til turnusordningen. Når alle tilmeldinger er i hus hos Sundhedsstyrelsen (SST) oprettes et passende antal turnuspladser i 22 turnusområder.<sup>5</sup> SST betegner dette som fase A af fordelingsproceduren. Før årsskiftet 06/07 var der 16 turnusområder, bestående af de enkelte amter, H:S og Bornholms Regionskommune. I det følgende refererer vi til grupperingen af hospitaler og sygehuse benyttet før 2007 (da vores simuleringer er baseret på data som refererer til disse), men det har ingen betydning for analysen. Efter oprettelsen af turnuspladser foregår en lodtrækning. Hver turnussøgende læge får tildelt et nummer, og skal derefter liste amter, H:S og Bornholms Regionskommune i en prioriteret rækkefølge efter hvor den turnussøgende ønsker at komme i turnus. Sundhedsstyrelsen betegner dette som fase B af fordelingsproceduren. Efter at alle har indsendt deres prioriteringsskema fordeler SST de turnussøgende efter princippet om at ”det laveste nummer får lov at vælge først.” Et eksempel herpå kunne være den netop færdige læge A der har fået tildelt nr. 31 og har udfyldt sin prioriteringsliste som følger:

- 1 H:S
- 2 Københavns Amt
- 3 Roskilde Amt
- ...

---

<sup>5</sup> Se <http://www.sst.dk/Uddannelse/Laeger/Turnus.aspx>

Sundhedsstyrelsen har allerede fordelt lægerne med lodtrækningsnumre fra 1-30 da de kigger på As prioriteringsliste. Blandt de allerede fordelte er 26 blevet fordelt til H:S der har plads til 26 og 3 blevet fordelt til Københavns Amt der har plads til 30. SST kan derfor ikke tildele A sin førsteprioritet, men kan imødekomme hendes andenprioritet. A får derfor tildelt en turnusplads i Københavns Amt.

Efter endt fase B er alle turnussøgende blevet fordelt blandt amter, H:S og Bornholms Regionskommune. Det er derefter op til det enkelte amtslige videreuddannelsesråd at fordele de turnussøgende ud på de enkelte hospitalspladser. Det er kutyme at dette sker ved at lade de turnussøgende prioritere de enkelte pladser og så fordele dem efter deres oprindelige lodtrækningsnummer.

En krølle på historien er at man tager særlige hensyn til ægtefæller, samlevende og læsemakkere.<sup>6</sup> Disse kan efter ønske blive fordelt til samme amt. Dette foregår ved at kun den ene får tildelt et nummer og at den anden derefter bare følger med under SSTs fordeling af de turnussøgende. Parret bliver således tildelt det amt, der når parret står for tur til at blive fordelt, har plads til to og som parret helst ønsker.

Hvis den enkelte turnussøgende efter fordelingen af en hospitalsplads er utilfreds med hvor han/hun er endt, kan han/hun bytte med en anden turnussøgende med samme problem. Det er op til den enkelte turnussøgende at finde en person der vil bytte. Hvis det ikke er muligt at finde en tilfredsstillende byttehandel må den turnussøgende acceptere udfaldet af fordelingsproceduren. Det er denne byttemulighed der af nogen bliver brugt til handel med pladser.

Endeligt indgår enkelte turnussøgende slet ikke i den generelle lodtrækning, da særlige vilkår gør sig gældende for dem. Det kan fx være værnepligt eller sygdom i den nærmeste familie. Denne gruppe bliver fordelt inden lodtrækningen og kan derfor (set fra en planlæggeres synspunkt) ignoreres under analysen af forskellige fordelingsprocedurer.

## Problematisk aspekter ved den nuværende danske turnusordning

Om den danske fordelingsprocedure kan man - i det mindste - sige at den "virker". Der kommer færdiguddannede læger ud fra turnusstillingerne. Som antydning i indledningen er de økonomiske argumenter for at vælge netop den fordelingsprocedure (der er beskrevet i forrige afsnit) imidlertid ikke oplagte, og det er givetvis fordi der ikke rigtigt er nogen. Utilfredsheden over handlen med turnuspladser kan ses som et symptom på at fordelingsproceduren, som den bruges i dag, ikke fungerer optimalt.

Det er naturligt at stille sig selv det spørgsmål hvorfor man ikke bare forbyder byttehandler for at komme problemet med penge under bordet til livs? Svaret ligger i et andet mærkeligt designaspekt ved den nuværende fordelingsprocedure. Valget af turnusplads foregår over to runder. I den første runde indsnævres den geografiske placering af turnuspladsen til amtsplan og først i anden runde finder den turnussøgende hvor han/hun endeligt placeres. Dette kan give anledning til en fordeling af de turnussøgende, der ikke er stabil (og derved ikke Pareto-optimal). Og i og med at dette kan

---

<sup>6</sup> Fra årsskiftet 2006/2007 udgår læsemakkerordningen.

forekomme, er det i princippet ufornuftigt at forbyde byttehandler. Et eksempel kan kaste lys på problemstillingen: A og B er begge turnussøgende fra Aarhus Universitet og deres præferencer over sygehuse er som følger (øverst er bedst):

<u>A:</u>	<u>B:</u>
Aarhus Amtssygehus	Aarhus Amtssygehus
...	...
Haderslev	Randers
...	...
Randers	Haderslev
...	...

Ud fra disse præferencer udfylder de prioriteringsskemaerne til SST

<u>A:</u>	<u>B:</u>
Aarhus Amt	Aarhus Amt
...	...
Sønderjyllands Amt	Sønderjyllands Amt

Lodtrækningsnumrene vil at A på yderste mandat bliver sendt til Aarhus Amt, mens B er uheldig med sit nummer og bliver sendt til Sønderjylland. B får en turnusplads på Haderslev Sygehus og A får, fordi hun som en af de sidste fik lov til at vælge Aarhus Amt, ikke Aarhus Amtssygehus som ønsket med derimod Randers Sygehus. Fordelingsproceduren opnår her et uoptimalt resultat. Ved at A og B bytter plads bliver de begge stillet bedre.

Man kan også angribe selve lodtrækningsproceduren for ikke at være optimal. For at komme videre med denne pointe er det en fordel at skrælle alt overflødig af vores problemstilling, og betragte fordelingsprocedurer inden for rammerne af en abstrakt økonomisk model.

At finde en fordelingsprocedure til turnusordningen hører under den kategori af problemer som i litteraturen går under navnet "the random assignment problem", se f.eks. Bogomolnaia og Moulin (2001) og Katta og Sethuraman (2006).

Vi modellerer problemet med  $n$  agenter (de turnussøgende) blandt hvilke  $n$  udelelige objekter (turnuspladserne) skal fordeles. Agenterne har mulighed for at angive deres præferencer over objekterne (rangordne objekterne), men enhver form for økonomisk kompensation er ikke tilladt i modellen. Selve proceduren foregår ved at agenterne rangordnes ved en lodtrækning for efter tur at vælge sit foretrukne objekt. I litteraturen går denne måde at matche agenter med objekter under navnet Tilfældigt Sekventielt Valg (Random Serial Dictatorship). Når den lodtrækningsprocedure der anvendes, benytter en ligefordeling over alle rangordninger af agenter, som det er tilfældet med den nuværende danske fordelingsprocedure, kaldes fordelingsmetoden Tilfældig Prioritet (Random Priority).

Et basalt krav til en fordelingsprocedure er såkaldt ex-post efficiens. Dette begreb dækker over at alle udfald fra fordelingsproceduren skal være stabile. Der må ikke findes gensidigt fordelagtige byttehandler blandt agenterne efter at de er blevet parret med et objekt af fordelingsproceduren. Med et krav om ex-post efficiens indsnævres antallet af mulige fordelingsprocedure drastisk. Et resultat af Bogomolnaia og Moulin (2001) foreskriver at ethvert stabilt udfald fra en

fordelingsprocedure svarer til en rangordning af agenterne og en efterfølgende fordeling af objekter efter princippet højst rangeret vælger først. Med andre ord er det, givet et stabilt udfald og agenternes præferencer, muligt at konstruere en rangordning der genskaber det stabile udfald ud fra princippet højst rangeret vælger først. En vilkårlig fordelingsprocedure der producerer stabile udfald svarer derfor til en sandsynlighedsfordeling over alle mulige rangordninger af agenterne. At trække en rangordning fra en fordeling og efterfølgende fordele objekter blandt agenter efter princippet højst rangeret vælger først er derfor præcist definitionen på et "random serial dictatorship". Enhver ex-post efficient fordelingsprocedure er derfor et "random serial dictatorship".

En ny fordelingsprocedure for den danske turnusordning skal derfor søges blandt de procedurer der fremkommer når sandsynlighedsfordelingen over rangordninger ændres. Denne noget tekniske diskussion belyses med fordel ved et eksempel<sup>7</sup>.

Betragt 4 agenter: A1, A2, A3, A4 med strenge præferencer over 4 objekter: O1, O2, O3, O4. Agenternes præferencer følger nedenstående skema:

A1: O1 > O2 > O3 > O4  
 A2: O1 > O2 > O3 > O4  
 A3: O2 > O1 > O4 > O3  
 A4: O2 > O1 > O4 > O3

Rangordningen (A1, A2, A3, A4) af agenterne leder gennem princippet højst rangeret vælger først til allokationen:

A1	A2	A3	A4
O1	O2	O4	O3

A1 vælger sit foretrukne objekt blandt alle 4 objekter – altså O1. A2 vælger blandt de 3 resterende objekter O2, O3, O4 sit foretrukne objekt O2 etc.

De  $24 = 4!$  mulige rangordninger giver anledning til et antal forskellige allokationer:

Rangordning:	Allokation:
(A1, A2, A3, A4)	A1 A2 A3 A4 O1 O2 O4 O3
(A1, A2, A4, A3)	O1 O2 O3 O4
(A1, A3, A2, A4)	O1 O3 O2 O4
(A1, A3, A4, A2)	O1 O3 O2 O4
(A1, A4, A2, A3)	O1 O3 O4 O2
(A1, A4, A3, A2)	O1 O3 O4 O2
(A2, A1, A3, A4)	O2 O1 O4 O3
(A2, A1, A4, A3)	O2 O1 O3 O4
(A2, A3, A1, A4)	O3 O1 O2 O4
(A2, A3, A4, A1)	O3 O1 O2 O4
(A2, A4, A1, A3)	O3 O1 O4 O2
(A2, A4, A3, A1)	O3 O1 O4 O2
(A3, A1, A2, A4)	O1 O3 O2 O4

<sup>7</sup> Eksemplet er taget fra Moulin og Bogomolnaias artikel.

(A3, A1, A4, A2)	O1	O3	O2	O4
(A3, A2, A1, A4)	O3	O1	O2	O4
(A3, A2, A4, A1)	O3	O1	O2	O4
(A3, A4, A1, A2)	O3	O4	O2	O1
(A3, A4, A2, A1)	O4	O3	O2	O1
(A4, A1, A2, A3)	O1	O3	O4	O2
(A4, A1, A3, A2)	O1	O3	O4	O2
(A4, A2, A1, A3)	O3	O1	O4	O2
(A4, A2, A3, A1)	O3	O1	O4	O2
(A4, A3, A1, A2)	O3	O4	O1	O2
(A4, A3, A2, A1)	O4	O3	O1	O2

En optælling viser at A1 10 ud af 24 gange får O1. Hvis sandsynligheden for at hver rangordning forekommer er lige stor vil A1 få O1 med sandsynlighed 5/12. En tilsvarende udregning kan foretages for alle kombinationer af agenter og objekter og opsummeres i en såkaldt bistokastisk matrix.<sup>8</sup>

	O1:	O2:	O3:	O4:
A1:	5/12	1/12	5/12	1/12
A2:	5/12	1/12	5/12	1/12
A3:	1/12	5/12	1/12	5/12
A4:	1/12	5/12	1/12	5/12

Matricen opsummerer de marginale<sup>9</sup> sandsynligheder for at en given agent får et givent objekt under ”random priority” fordelingsproceduren. Betragt en anden sandsynlighedsfordeling over rangordningerne:

Rangordning:	Sandsynlighed:
(A1, A3, A2, A4)	1/2
(A2, A4, A1, A3)	1/2

Denne fordeling giver anledning til matricen:

	O1:	O2:	O3:	O4:
A1:	1/2	0	1/2	0
A2:	1/2	0	1/2	0
A3:	0	1/2	0	1/2
A4:	0	1/2	0	1/2

Bemærk at agent A1 har fået større sandsynlighed for at få sin 1. og 3. prioritet på bekostning af en mindre sandsynlighed for at få sin 2. og 4. prioritet. Det er endda muligt at fortolke skiftet i sandsynligheder som at agent A1 har fået større sandsynlighed for at få sin 1. prioritet på bekostning af en mindre sandsynlighed for at få sin 2. prioritet og større sandsynlighed for at få sin 3. prioritet på bekostning af en mindre sandsynlighed for at få sin 4. prioritet. Den anden

<sup>8</sup> En bistokastisk matrix en matrix med ikke-negative reelle indgange hvor alle søjler og rækker summer til 1.

<sup>9</sup> Marginal skal forstås i sin sædvanlige sandsynlighedsteoretiske betydning: En indgang i den bistokastiske matrix angiver sandsynligheden for at en given agent bliver parret med et givent objekt når man ikke skeler til hvordan andre objekter fordeles. Modsat simultane sandsynligheder.



sandsynlighedsfordeling stiller dermed agent A1 bedre. Overraskende er det, at ikke bare A1 men alle agenter stilles bedre med den anden sandsynlighedsfordeling. Alle agenterne må foretrække at lodtrækningen foregår efter den anden sandsynlighedsfordeling frem for "random priority"s ligefordeling.

Af eksemplet fremgår at selv når man kigger isoleret på fordelingen af turnussøgende ud på amter, H:S og Bornholms Regionskommune og ikke tager højde for problemer der opstår når de turnussøgende viderefordes af de amtslige videreuddannelsesråd, er der stadig problemer. Valget af den nuværende fordelingsprocedure kan ikke motiveres økonomisk.

Ovenstående udgør de problematiske aspekter ved den nuværende fordelingsprocedure. Lad os for overblikkets skyld opsummere:

- Opdeling af fordelingsproceduren i to dele – et landsplan og et amtsplan – åbner op for ikke-stabile slutmatchinger. Agenterne må derfor tillades at bytte pladser, hvilket åbner op for penge under bordet og giver et incitament til at angive urigtige præferencer.
- Random Priority algoritmen der ligger til grund for fordelingsproceduren er ikke økonomisk efficient. Givet visse familier af præferencer er det muligt at finde en alternativ fordelingsprocedure som stiller alle agenter bedre ex ante.

## En ny fordelingsprocedure

Eksemplet i forrige afsnit peger fremad mod hvordan en alternativ, bedre fordelingsprocedure skal konstrueres. Da al essentiel information omkring en ex-post efficient fordelingsprocedure kan samles i en bistokastisk matrix, er det naturligt at tage udgangspunkt i disse matricer. Eksemplet viste hvordan en matrix kunne være bedre end en anden set ud fra agenternes synspunkt. Dette formaliseres i begrebet *stokastisk dominans*. En bistokastisk matrix A stokastisk dominerer en bistokastisk matrix B hvis (og kun hvis) alle agenter foretrækker at der trækkes lod efter matricen A frem for matricen B. En agent vil foretrække matrix A frem for matrix B hvis

- Sandsynligheden for at få sin 1. prioritet er mindst lige så stor under A som under B.
- Summen af sandsynlighederne for at få 1. og 2. prioritet er mindst lige så stor under A som under B.
- Summen af sandsynlighederne for at få 1., 2. og 3. prioritet er mindst lige så stor under A som under B.
- ...

Stokastisk dominans er en partiel ordensrelation på rummet af bistokastiske matricer. Maksimalt elementer under denne ordning kaldes *ordinalt efficiente* eller o-efficiente. Alternativt er en bistokastisk matrix A o-efficient hvis der ikke findes en bistokastisk matrix B der stokastisk dominerer A givet agenternes præferencer. O-efficiens er en økonomisk tilfredsstillende egenskab ved en bistokastisk matrix der repræsenterer en fordelingsprocedure fordi begrebet er analogt til Pareto-efficiens: Det er umuligt at finde en alternativ fordelingsprocedure som alle agenter vil foretrække frem for den bestående. Fordelingsprocedurer svarende til o-efficiente bistokastiske matricer er ex-post efficiente<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup> Lemma 2 (ii) i Bogomolnaia og Moulins artikel.

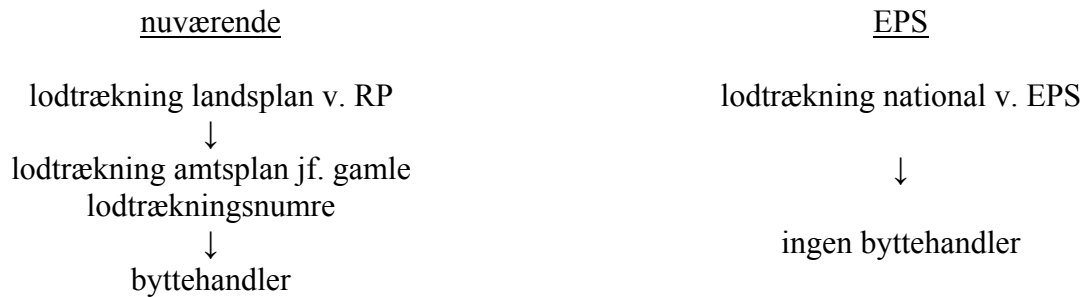
En fordelingsprocedure der altid har en  $o$ -efficient bistokastisk matrix er ønskelig. Dermed er fordelingsproceduren i en vis forstand økonomisk efficient. Samtidigt er en fordelingsprocedure der foregår i én runde også ønskelig da det fjerner problemet med ikke-stabile slutmatchinger og derved et behov for efterfølgende bytteri. Begge krav er mulige at efterkomme (det andet helt oplagt).

En algoritme udviklet af Katta og Sethuraman (2006) kaldet EPS-algoritmen kan ud fra de turnussøgendes præferencer generere en  $o$ -efficient bistokastisk matrix. I vores implementering dekomponeres matricen efterfølgende til en konveks kombination af permutationsmatricer ved Birkhoff von-Neumann algoritmen.<sup>11</sup> Vægtene fra dekompositionen bruges efterfølgende som sandsynlighedsfordeling over allokatationer (permutationsmatricerne) af agenter til objekter. Altså et lotteri over mulige parring af turnussøgende med turnussteder. Denne algoritme er derfor et muligt alternativ til Random Priority algoritmen – RP-algoritmen der ligger til grund for den nuværende fordelingsprocedure. At forklare i detaljer hvordan EPS-algoritmen fungerer, er for teknisk, men det kan bemærkes at den i forhold til RP-algoritmen øger sandsynligheden for at ”gode” rangordninger af de turnussøgende udtrækkes.

EPS-algoritmen er grundstenen i en ny fordelingsprocedure. Skemaet nedenfor opridser den nye fordelingsprocedure og sammenligner den med opbygningen af den nuværende.

---

<sup>11</sup> Den udgave af Birkhoff von-Neumann algoritmen vi bruger er at finde i Liu (1968). Både EPS-algoritmen og Birkhoff von-Neumann algoritmen har polynomielle køretider. Køretiden for begge algoritmer er domineret af  $O(n^4)$ .



EPS-fordelingsproceduren har flere fortrin frem for den nuværende. Dels er den o-efficient, dels kan den håndtere indifferens mellem turnussteder blandt de enkelte agenter. Desuden er det muligt at vise at ingen agent misunder en anden agent for dennes ex-ante sandsynlighedsfordeling over turnuspladser.

At åbne op for at agenterne kan være indifferente mellem turnussteder er nødvendigt når fordelingen foregår i *et* skridt. Fuldstændig prioritering på turnusstedniveau er svært at forlange når der er 52 forskellige turnussteder. Ulempen herved er at det så i få (teoretiske) tilfælde kan betale sig for agenterne at oplyse urigtige præferencer for at opnå en bedre ex-ante sandsynlighedsfordeling over turnuspladser. Det kræver dog at den enkelte agent har adgang til de andre agents fulde præferencer, for at han med fordel kan manipulere sine egne præferencer. I praksis er dette aldrig tilfældet.

En ulempe ved EPS-fordelingsproceduren er at ægtefæller/samlevere ikke kan håndteres af algoritmen. Dette kan løses ad to veje. Enten kan en ekstra plads oprettes ad hoc hvis et par frem for en enkelt agent tildeles en turnusplads. Ellers kan, som det også hænder under den nuværende ordning, en plads reserveres ved samme turnussted til ægtefællen/samleveren et halvt år senere. De to starter derved forskudt på turnus, men da mange ægtefæller/samlevere alligevel ikke er færdige samtidigt, vil dette næppe være et stort problem i praksis.

Det er værd at understrege at EPS-fordelingsproceduren ikke stokastisk dominerer den nuværende procedure, men er o-efficient. EPS-fordelingsproceduren er derfor ikke ubetinget bedre en den nuværende procedure, men må antages at performe bedre på sigt. Denne hypotese underbygger vi ved simulationseksperimenter.

## Simulation

Inden vi diskuterer de konkrete simulationer, er det nødvendigt at afgøre hvornår en procedure fordeler agenter "godt". Vi har mao. brug for at kunne sammenligne fordelingsprocedurer udfra en "bedre-end-relation". Efter endt lodtrækning offentliggør SST selv en liste med følgende indhold:

- Antallet af agenter der opnåede deres 1. prioritet
- Antallet af agenter der opnåede deres 2. prioritet
- Antallet af agenter der opnåede deres 3. prioritet
- ...

Vi kalder en sådan liste knyttet til udfaldet af en enkelt lodtrækning for en *scoringsliste*. Scoringslister lader sig let konstruere for alle typer af fordelingsprocedurer og da det ydermere giver mening at tale om det *gennemsnitlige* antal agenter der opnåede deres x'te prioritet, kan en

liste med et sådant indhold nemt genereres ud fra 100 eller 1000 simulationer fra en fordelingsprocedure – simpelthen ved at tage gennemsnit koordinatvis af scoringslisterne genereret ud fra de enkelte udfald. Et gennemsnit af scoringslister vælger vi også at kalde en scoringsliste. Vektorudgaven af store tals lov foreskriver at sådanne scoringslister vil konvergere mod en fast vektor. En fast vektor som det virker rimeligt at sammenligne de forskellige fordelingsprocedurer ud fra.

Selve sammenligningen af fordelingsprocedurer skal foregå ved Lorenzdominans. En scoringsliste,  $(x_i)$ , over gennemsnitligt opnåede prioriteter er bedre end en anden scoringsliste,  $(y_i)$ , hvis:

- $x_1 \geq y_1$
- $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$
- $x_1 + x_2 + x_3 \geq y_1 + y_2 + y_3$
- ...

Det er klart at ikke alle scoringslister kan sammenlignes under Lorenzdominans, men en sådan ordning er tilstrækkelig til vores formål. Et eksempel er to fordelingsprocedurer, A og B, der tre gange benyttes til at fordele tre agenter:

antal	A			B		
	1. prioriteter	2. prioriteter	3. prioriteter	1. prioriteter	2. prioriteter	3. prioriteter
1. ford.	2	1	0	1	2	0
2. ford.	1	1	1	2	0	1
3. ford.	2	1	0	2	0	1
gns.	5/3	1	1/3	5/3	2/3	2/3

A dominerer B, da:

$$\begin{array}{rcl}
 A & & B \\
 5/3 & & \geq 5/3 \\
 5/3+1 & & \geq 5/3+2/3 \\
 5/3+1+1/3 & & \geq 5/3+2/3+2/3
 \end{array}$$

I gennemsnit fordeles 1/3 flere agenter på deres 2. prioritet frem for deres 3. prioritet under fordelingsproceduren A ceteris paribus.

Ovennævnte måde at sammenligne fordelingsprocedurer har både fordele og ulemper. Største fordel er nok at sammenligningen er intuitiv forståelig. Største ulempe er at det er et aggregeret mål. Alle agenter vægtes lige og der tages ikke højde for at springet fra en 2. til en 3. prioritet for en agent kan være meget værre end springet fra en 4. til en 17. prioritet er for en anden agent. Alligevel virker sammenligning ved Lorenzdominans som et fornuftigt mål for effektiviteten af fordelingsprocedurer, da sammenligningen er tilpas detaljeret til at fange mindre forskelle og ikke så detaljeret at en sammenligning bliver umulig, som tilfældet er med stokastisk dominans.

Grundlaget for simulationerne er en spørgeskemaundersøgelse foretaget blandt medicinstuderende på Københavns Universitetet i januar 2007 der stod for at skulle i turnus. De studerende blev spurgt om dels at prioritere blandt amter, H:S og Bornholms Regionskommune, dels blandt de enkelte

turnussteder. Nedenstående er en liste over turnussteder fordelt på amt, H:S og Bornholms Regionskommune:

**Bornholm:**

Rønne Sygehus

**Frederiksborg:**

Hillerød sygehus  
Helsingør sygehus  
Frederikssund sygehus

**Fyn:**

Nyborg  
Middelfart  
Svendborg  
Faaborg  
Odense  
Odense-Svendborg

**H:S:**

Bispebjerg  
Hvidovre  
Frederiksberg  
Amager

**Københavns Amt:**

Glostrup  
Gentofte  
Herlev  
Amager

**Nordjyllands Amt:**

Aalborg  
Dronninglund/Aalborg  
Farsø/Aalborg  
Frederikshavn  
Hjørring  
Hobro

**Ribe Amt:**

Esbjerg/Varde  
Grindsted

**Ringkøbing Amt:**

Holstebro  
Herning  
Ringkøbing

**Roskilde Amt:**

Roskilde Amts Sygehus  
Køge  
Amtssygehuset Roskilde

**Sønderjyllands amt:**

Haderslev  
Sønderborg  
Tønder

**Storstrøms Amt:**

Næstved  
Nykøbing Falster  
Fakse  
Nakskov

**Vejle Amt:**

Horsens  
Vejle:  
Fredericia:  
Kolding:

**Vestsjællands Amt:**

Kalundborg  
Holbæk  
Slagelse  
Ringsted

**Viborg Amt:**

Viborg-Kjellerup Sygehus  
Sygehus Nord, Nykøbing-  
Thisted

**Århus Amt:**

Silkeborg  
Randers Centralsygehus  
Aarhus Amtssygehus  
Århus Kommunehospital

Det er vigtigt at pointere at prioriteringen af amt, H:S og Bornholms Regionskommune skete adskilt fra prioriteringen af turnussteder. Vi valgte at spørge de studerende på denne måde for at kunne undersøge om de prioriterer konsistent, eller om en situation lignende den vi har skitseret for de to turnussøgende fra Aarhus Universitet kan opstå. Det viste sig at ud af 111 udfyldte spørgeskemaer var ikke ét spørgeskema konsistent, forstået således at hvis et amt var prioriteret højere end et andet ville også alle turnussteder i det højt prioriterede amt være højere prioriterede end turnuspladserne i det lavt prioriterede amt. I spørgeskemaundersøgelsen blev ægtefælle/samleverordningen ignoreret.

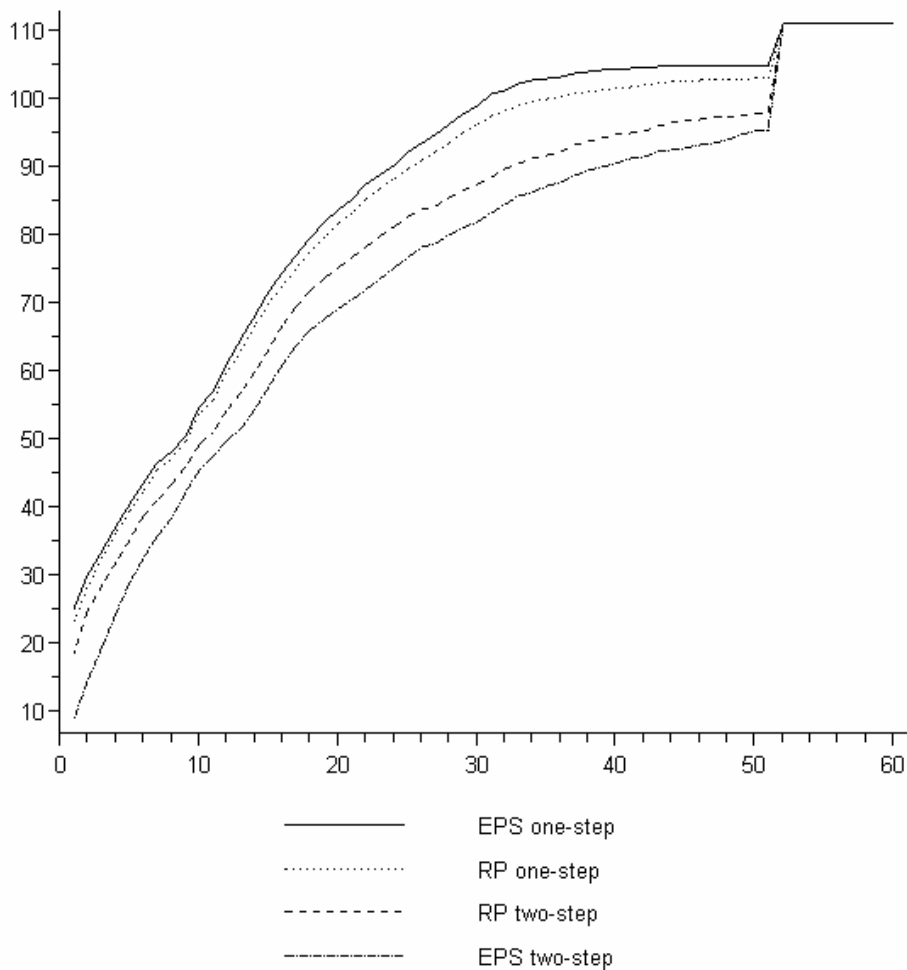
111 turnussøgende, alle fra Københavns Universitet, er selvfølgelig ikke en repræsentativ population i forhold til en rigtig turnusrunde, hverken i antal eller prioriteringer. Antallet af normalt oprettede turnuspladser pr. turnussted valgte vi derfor at nedskalere med en faktor ca. 3,5 så antal turnuspladser og antal turnussøgende svarede til hinanden. Dette gjorde vi for at "presse" algoritmerne, så turnussøgende i simulationerne også bliver fordelt på upopulære pladser, mere i tråd med en fordeling ved en rigtig turnusrunde. Men da prioriteringerne stadig ikke er repræsentative for en normal turnuspopulation, er fordelingsresultaterne fra simulationerne derfor ikke direkte sammenlignelige med en rigtig turnusrunde.

Simulationerne sammenholder 4 forskellige fordelingsprocedurer:

- RP two-step: Referencefordelingsproceduren. Designet med henblik på at ligne den nuværende fordelingsprocedure så meget som muligt. Ud fra en ligefordeling trækkes en rangordning af agenter. Agenterne fordeles efter deres prioritering af amter, H:S og Bornholms Regionskommune ud fra princippet højst rangeret vælger først. Agenterne beholder deres "lodtrækningsnummer" og bliver derefter i hvert amt, H:S og Bornholms Regionskommune fordelt efter nummeret ud fra deres turnussted-prioritering, igen ud fra princippet højst rangeret vælger først.
- RP one-step: Ud fra en ligefordeling trækkes en rangordning af agenter som fordeles efter deres prioriteringer af turnussteder ud fra princippet højst rangeret vælger først. Fordelingen af agenter sker i ét skridt, men selve algoritmen, hvorved fordelingen foregår, er identisk med den brugt i første runde af den nuværende fordelingsprocedure.
- EPS one-step: Fordelingen sker som skitseret i sidste afsnit ved hjælp af EPS algoritmen. Algoritmen får som input agenternes prioriteringslister over turnussteder og genererer en o-efficient bistokastisk matrix. Ud fra den bistokastiske matrix trækkes en allokation af agenter på turnussteder.
- EPS two-step: En hybrid mellem EPS one-step og RP two-step. Ud fra en ligefordeling trækkes en rangordning af agenter. Agenterne fordeles efter deres prioritering af amter, H:S og Bornholms Regionskommune ud fra princippet højst rangeret vælger først. Derefter fordeles agenterne på turnuspladser i de enkelte amter, H:S og Bornholms Regionskommune ved hjælp af EPS algoritmen uden indflydelse fra lodtrækningsnumrene fra første fordelingsrunde. EPS two-step er medtaget fordi den vil kunne løse det problem der ligger i at ægtefælle/samleverordningen ignoreres. Da agenterne fordeles efter RP-metoden på amtsplan er det muligt at sende ægtefæller/samleverere til samme amt uden komplikationer. Ægtefælle/samleverordningen garanterer ægtefæller/samleverere at ende i samme amt, H:S eller Bornholms Regionskommune.

I simulationssammenhæng ignoreres i alle tilfælde eventuelle efterfølgende fordelagtige byttehandler blandt agenter.

Alle simulationer blev kørt mindst 100 gange for at opnå tilstrækkelig konvergens af scoringslisterne. I grafen nedenfor er kumulerede summer af scoringslister fra de 4 fordelingsprocedurer plottet. Y-aksen angiver det gennemsnitlige antal agenter som mindst opnår en given prioritet. Hvis fx 17 på x-aksen svarer til 57,3 på y-aksen kan det tolkes som det gennemsnitlige antal agenter der allokeres til en turnusplads de har angivet som 1.-17.-prioritet er 57,3. Fortolkningen af plottet er at hvis grafen for en fordelingsprocedure helt ligger over grafen for en anden, så Lorenzdominerer scoringslisten for den første fordelingsprocedure scoringslisten for den anden.



**Figur 1**

Af plottet fremgår at de 4 fordelingsprocedurer alle står i relation til hinanden og (Lorenzdominans er transitiv):

$$\text{EPS one-step} > \text{RP one-step} > \text{RP two-step} > \text{EPS two-step}$$

Forklaringen på hoppet i grafen ud for værdien 52 på x-aksen skal søges i at der er 52 turnussteder. Alle turnussteder der af agenterne enten ikke er blevet prioriteret eller er prioriteret lavest er registreret som en 52. prioritet. Dem er der mange af og en betydelig del af agenterne er derfor blevet tildelt en 52. prioritet.

## Konklusion og afsluttende bemærkninger

Ud fra simulationen ser EPS one-step ud til mere effektivt at fordele de turnussøgende end RP two-step, den nuværende fordelingsprocedure. I det konkrete eksempel opnår 25,0 agenter mod 18,6 deres førsteprioritet. Det er en forbedring på over 25%. Samtidigt løser EPS one-step fordelingsproceduren problemerne i forbindelse med byttehandler ved at forbyde dem. Og forbuddet kan begrundes økonomisk med at udfaldet af EPS-fordelingsproceduren er ex-post efficient. Det virker altså fornuftigt at skifte fordelingsprocedure om end der ikke er noget strengt

økonomisk argument for at gøre det i alle tilfælde: EPS one-step stokastisk dominerer ikke konsekvent RP two-step.

RP one-step performer næsten lige så godt som EPS one-step og er derfor et interessant alternativ. Fordelen ved RP one-step er at algoritmen er nem at implementere. Det kan undre at SST ikke allerede har valgt denne løsning, da udfaldene af RP one-step er ex-post efficiente og man derfor ville kunne have forbudt byttehandler. Desuden vil en RP one-step løsning nemt kunne håndtere ægtefæller/samlevere.

Da konklusionerne i nærværende artikel er baseret på et datasæt der kun indeholder prioriteringslister fra studerende fra Københavns Universitetet, må de tages med visse forbehold. Mere præcise konklusioner kunne opnås hvis et datasæt for en hel turnusrunde blev anvendt i simulationerne. Ud fra det nuværende datamateriale og den økonomiske analyse af turnusordningens nuværende fordelingsprocedure vil vi dog anbefale at man tester brugen af den nye procedure for evt. på sigt at skifte helt over til denne.

Endeligt kan det nævnes at det os bekendt er første gang at EPS-algoritmen er blevet implementeret og forsøgt sammenlignet med RP-algoritmen i en konkret sammenhæng. Sammenligningen af de to "rene" algoritmer er værd at bemærke, da vores resultater underbygger en noget u håndgribelig teoretisk pointe om at EPS-algoritmen, da denne er o-efficient, er bedre end den ikke o-efficient RP-algoritme. Dog skal det også bemærkes at vi med vores simulationer kun har eftervist denne påstand for et enkelt om end på ingen måde trivielt tilfælde. Også måden hvorved sammenligningen foregår (Lorenzdominans mellem scoringslister) er værd at bemærke. Sammenligningsmetoden er et løsningsbud på det problem, at algoritmerne ikke er sammenlignelige under stokastisk dominans.

## Referencer

- Bogomolnaia A, Moulin H, 2001. A new solution to the random assignment problem. *Journal of Economic Theory* 100, 295-328.
- Katta A-K, Sethuraman J, 2006. A solution to the random assignment problem on the full preference domain. *Journal of Economic Theory* 131, 231-250.
- Liu CL, 1968. *Introduction to Combinatorial Mathematics*. McGraw-Hill, New York.
- Roth AE, 1984. The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory. *Journal of Political Economy* 92, 991-1016.
- Roth AE, 2003. The origins, history, and design of the resident match. *Journal of the American Medical Association* 289, 909-912.